в которых $g_m(x)$ – известные φ_{C^n}-распределения, т. е.

$$g_m(x) = \sum_{|k|=0}^{\infty} g_{m,k} \exp\left(\frac{ikx}{T}\right), \quad g_{m,k} \in \mathrm{C}^n.$$

Определение. *φ_B – распределение и (3) называется решением задачи (1), (4), если*

$$\sum_{|k|=0}^{\infty} P(t,x,D)\left(u_k(t)\exp\left(\frac{ikx}{T}\right)\right) = f(t,x)$$

и выполнены условия (4).

Теорема. *Если $C_{\alpha,j}(t) \in L^1_{loc}(R)$, то задача (1), (4) корректно разрешима по Адамару в пространстве φ_B-распределений.*

Литература

1. Hadamard J. *Le problème de Cauchy et les équattions aux dérivées partielles linéares hyperbaliques.* – Paris: Hermann, 1932. – 542 p.

2. Mokeichev V. S., Sidorov A. M. *On an expansiion in the series by given system of elements* // Исследования по прикладной математике и информатике. – Казань: Казанский госуниверситет. – 2004. – Вып. 25. – С. 163–167.

3. Мокейчев В. С. *О разложении в ряды по заданной системе элементов* // Исследования по прикладной математике и информатике. – Казань: Изд-во Казанского федерального университета. – 2011. – Вып. 27. – С. 144–152.

CORRECTLY SOLVABLE PROBLEMS IN LINEAR PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS

V.S. Mokeychev, A.M. Sidorov

By use of the theory of φ_B – distributions we consider Cauchy's problem for linear partial differential equations.

Keywords: linear partial differential equation, Cauchy's problem, φ_B-distribution.

УДК 514.822

НЕРАВЕНСТВА, ВКЛЮЧАЮЩИЕ ВКЛЮЧАЮЩИЕ ДРОБНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ ФУНКЦИИ И ЕЕ ПРОИЗВОДНУЮ

Р.Г. Насибуллин[1]

1 *nasibullinramil@gmail.com*; Казанский (Приволжский) федеральный университет

Доказаны новые неравенства, включающие дробные интегралы функции и ее производную. Предварительно мы получаем нижние оценки весовых норм производной через выражения, зависящие от дробных интегралов Римана-Лиувилля.

Ключевые слова: неравенство Харди, дробный интеграл Римана-Лиувилля, функция Бесселя.

Пусть $\rho > 0$ и абсолютно непрерывная функция $u : [0,\rho] \to \mathbb{R}$ удовлетворяет граничному условию $u(0) = 0$ и $u \not\equiv 0$.

В статье [1] Ф.Г. Авхадиев и Р.Г. Насибуллин показали, что для таких функций u при условиях $r \in [1,\infty)$, $s \in (-\infty, r)$ и $u'/t^{r-1} \in L^1(0,1)$ выполнено неравенство

$$\int_0^\rho \frac{|u(t)|}{t^s}dt < M(s,\ r)\rho^{r-s}\int_0^\rho \frac{|u'(t)|}{t^{r-1}}dt, \tag{1}$$

где

$$M(s,\ r) := \begin{cases} (1-s)^{-1}, & \text{если } r = 1; \\ (r-1)^{-1}\, e^{-1}, & \text{если } s = 1; \\ (r-s)^{-1}\,((r-1)/(r-s))^{(r-1)/(1-s)}, & \text{если } r \neq 1, s \neq 1. \end{cases}$$

Постоянная $M(s, r)$ является точной для всех допустимых s и r, т. е. не может быть уменьшена без дополнительных ограничений на функцию u.

С использованием неравенства Гельдера, из неравенства (1) при $s < 1$ и $p \geq 1$ несложно получить его L^p-аналог, а именно, следующее соотношение

$$\int_0^\rho \frac{|u(t)|^p}{t^s}dt \leq \rho^{p(1-s)}\left(\frac{p}{1-s}\right)^p\int_0^\rho \frac{|u'(t)|^p}{t^{s(1-p)}}dt. \tag{2}$$

Константа в неравенстве (2) является неулучшаемой только при $p = 1$ (см. подробнее [1]). Это легко заметить, если сравнить (2) с точным неравенством из статьи [2].

Отметим, что константа в L^p-аналоге неравенства (2) при $s = 1$ также не является оптимальной в силу точного неравенства

$$\int_0^1 \frac{|u(t)|^2}{t}dt \leq \frac{4}{j_0^2}\int_0^1 |u'(t)|^2 dt, \tag{3}$$

в котором равенство достигается на функции $u(t) = C'\sqrt{t}J_1(j_0\sqrt{t})$, причем $j_0 \approx 2.404826$ — это наименьший положительный корень функции Бесселя нулевого порядка J_0, J_1 — функция Бесселя первого порядка. Напомним, что функции Бесселя порядка ν определяется следующим образом

$$J_\nu(t) = \sum_{k=0}^\infty \frac{(-1)^k t^{2k+\nu}}{2^{2k+\nu}k!\Gamma(k+1+\nu)},\ t > 0, \nu \geq 0.$$

Здесь и далее через Γ обозначена гамма-функция Эйлера, т.е. $\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty t^{\alpha-1}e^{-t}dt$.

В данной работе мы обобщим и получим L^p-аналоги неравенства (1).

Справедливы следующие теоремы.

Теорема 1. *Пусть $\rho > 0, s \in [0,\alpha), \alpha \in (0,1]$ и $p > 1$. Тогда для любой абсолютно непрерывной функции $f : [0,\rho] \to \mathbb{R}$, такой что $f(0) = 0$ и $f'(x)/x^{\frac{s(1-p)}{p}} \in L^p(0,\rho)$, выполнено неравенство*

$$\int_0^\rho \frac{dx}{x^s}\int_0^x \frac{|f(t)|^{p-1}|f'(t)|}{(x-t)^{1-\alpha}}dt \leq \frac{\rho^{(p-1)(1-s)-\alpha+s}}{p(1-s)^{p-1}(\alpha-s)}\int_0^\rho \frac{|f'(x)|^p}{x^{s(1-p)}}dx.$$

Теорема 2. *Пусть* $\rho > 0, \alpha \in (0,1], s < 1$ *и* $p > 1$. *Тогда для любой абсолютно непрерывной функции* $f : [0,\rho] \to \mathbb{R}$, *такой что* $f(0) = 0$ *и* $f' \in L^2(0,\rho)$, *справедливо следующее неравенство*

$$\int_0^\rho \frac{dx}{x^\alpha} \int_0^x \frac{|f(t)||f'(t)|}{(x-t)^{1-\alpha}} dt \le \left(\frac{1}{\alpha} - H(\alpha)\right) \frac{\rho^{1-s}}{2(1-s)} \int_0^\rho \frac{|f'(x)|^2}{x^{-s}} dx + \frac{2}{j_0^2} \int_0^\rho |f'(x)|^2 dx,$$

где гармоническое число

$$H(\alpha) = \int_0^1 \frac{1-t^\alpha}{1-t} dt.$$

Следствие 1. *Пусть* $\rho > 0$. *Тогда для абсолютно непрерывной функции* $f : [0,\rho] \to \mathbb{R}$, *такой что* $f(0) = 0$ *и* $f' \in L^2(0,\rho)$, *справедливо следующее точное неравенство*

$$\int_0^\rho |f'(t) f(t)| \log \frac{\rho}{t} dt \le \frac{2}{j_0^2} \int_0^\rho |f'(t)|^2 dt.$$

Следствие 2. *Наименьшим собственным числом следующей граничной задачи*

$$u''(t) = -\lambda \frac{1}{t} u(t), \quad u(0) = 0$$

является число $\lambda_0 = \frac{j_0^2}{4}$ *и соответствующая этому собственному числу собственная функция*

$$u_0(t) = \frac{2}{j_0} C_1 \sqrt{x} J_1\left(j_0 \sqrt{x}\right).$$

Введем следующие обозначения:

$$M_{s,r,\alpha} = \max_{0 \le t \le 1} \left\{ t^{r-s} \left(B_1(s-\alpha,\alpha) - B_{t/\rho}(s-\alpha,\alpha) \right) \right\},$$

где

$$B_z(s-\alpha,\alpha) = \int_0^z \tau^{s-\alpha-1} (1-\tau)^{\alpha-1} d\tau,$$

а через $(I_{0+}^\alpha \varphi)(x)$ обозначим дробный интеграл Римана-Лиувилля функции $\varphi \in L^1(0,\rho)$, который определяется как

$$(I_{0+}^\alpha \varphi)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x \frac{\varphi(t)}{(x-t)^{1-\alpha}} dt, \ x > 0,$$

где $0 < \alpha < 1$. Отметим, что полную информацию о свойствах дробных интегралов можно найти в [3], а примеры неравенств типа Харди с дробными интегралами приведены в [3], [4].

Теорема 3. *Пусть $\rho > 0, r > s$ и $\alpha \in (0,1]$. Тогда для любой функции $\varphi \in L^1(0,\rho)$ выполнено следующее неравенство*

$$\int_0^\rho \frac{\left|(I^\alpha_{0+}\varphi)(x)\right|}{x^s} dx \le \frac{M(s,r,\alpha)}{\Gamma(\alpha)} \rho^{r-s} \int_0^\rho \frac{|\varphi(x)|}{x^{r-\alpha}} dx,$$

где

$$M(s,r,\alpha) = \begin{cases} (\alpha - s)^{-1}, & \text{если } r = \alpha,\ 0 \le s < \alpha; \\ \max\limits_{x\in[0,\rho]} \{1/\alpha - H(\alpha) + \log \rho/x\}, & \text{если } r > \alpha, s = \alpha; \\ M_{s,r,\alpha}, & \text{если } r > s > \alpha, \end{cases}$$

и Γ — гамма функция Эйлера.

Отметим, что при $\alpha = 1$ теорема 1 дает как следствие неравенство (2) с меньшей постоянной, теорема 2 — неравенство (3) и из теоремы 3 как следствие получим неравенство (1).

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 17-01-00282) и за счет средств субсидии, выделенной Казанскому федеральному университету для выполнения государственного задания в сфере научной деятельности (1.9773.2017/8.9).

Литература

1. Авхадиев Ф. Г., Насибуллин Р. Г. *Неравенства типа Харди в произвольных областях с конечным внутренним радиусом* // Сиб. матем. журн. – 2014. – Т. 55. – № 2. – С. 239–250.

2. Avkhadiev F. G., Wirths K.-J. *Sharp Hardy-type inequalities with Lamb's constants* // Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin. – 2011. – V. 18. – P. 723–736.

3. Самко С. Г. , Килбас А. А., Маричев О. И. *Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения*. – Минск: Наука и техника, 1987. – 688 с.

4. Stepanov V. D. *Weighted inequalities of Hardy type for Riemann-Liouville fractional integrals* // Sibirsk. Mat. Zh. –1990. – V. 31. – № 3. – P. 513–522.

INEQUALITIES INVOLVING FRACTIONAL INTEGRALS OF FUNCTION AND ITS DERIVATIVE

R.G. Nasibullin

We obtain new inequalities involving fractional integrals of function and its derivative. Preliminary, we prove lower estimates of weighted norms of the derivative through some expressions using the Riemann-Liouville fractional integrals.

Keywords: Hardy inequality, Riemann-Liouville fractional integral, Bessel function.